LA MECANIQUE QUANTIQUE VUE COMME PROCESSUS DYNAMIQUE

T. PAUL
D.M.A., ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Abstract

La théorie quantique a un peu plus d'un siècle, la mécanique quantique autour de quatre-vingts ans. Le mot "quantique", depuis quelques années, dépasse complètement le monde de la microphysique. Le but de cette courte note est d'essayer d'exhiber ce qui, dans l'axiomatique de la mécanique quantique sort de son propre domaine et traverse des branches aussi éloignées que, par exemple, la logique.

1. Introduction

Le mot quantique est à la mode. Non seulement il est clairement établi expérimentalement que le monde dans lequel nous vivons est quantique, et totalement, pleinement quantique, mais il y a maintenant dans le monde mathématique des groupes quantiques, des quantifications, une logique-quantique, bref toute une panoplie de considérations qui n'ont plus rien à voir avec le domaine initial de la mécanique quantique : la microphysique.

Revenons tout d'abord à cette dernière pour dire que l'expérience a définitivement montré dans les vingts dernières années que *toute* la mécanique quantique est présente dans la nature. Par *toute* je veux dire non seulement les aspects immédiatement acquis dès le départ, mais aussi les autres aspects, ceux qui ont causé problème. Il n'y a plus de paradoxes, plus de douleur, l'expérience a tranché : "ce" qui, dans notre regard classique sur le monde quantique nous semblait paradoxal ne l'est plus puisque "ce" existe, nous le rencontrons tous les jours.

Et il est bien question ici de regard classique, de projection classique sur le monde quantique : si l'on regarde le monde quantique avec des yeux quantiques tout frottement dispqrait, tout glisse sans aspérité. Mais peut-être faut il signaler tout de suite, que si nous avons tellement tendance à continuer à regarder classiquement quelquechose qui ne l'est plus, la théorie quantique elle même en porte sa part de responsabilité: c'est en fait une drôle de théorie.

En effet la mécamique quantique contient, comme presque tout théorie physique, une équation donnant la dynamique (Schrödinger ou Heisenberg, selon que l'on porté vers l'analyse ou l'algèbre). Mais là oú les autres équations de la physique mathématique sont des équations concernant des quantités macroscopiques (écoulement d'un fluide par exemple) et sont dérivées à partir de considérations microscopiques (conservation du nombre

EXPOSÉ AU COLLOQUE "LOGIQUE MATHEMATIQUE, INFORMATIQUE ET PHILOSOPHIE", UNIVERSITÉ PARIS 1, 24 AU 26 AVRIL 2003

de particules par exemple), l'équation de Schrödinger parcourt le chemin exactement inverse. C'est L'EQUATION microscopique par excellence (quoi de plus microscopique que l'électron), et elle ne peut se passer des aspects macroscopiques : c'est bien le modèle classique (énergie, énergie cinétique, potentielle, masse etc) qui fournit l'équation, plus exactement fournit les ingrédients de l'équation, la mécanique quantique se chargeant de denaturer les objets concernés (un point devient une fonction, une énergie cinétique un laplacien).

De cette petite discussion découle tout d'abord un premier trait, non pas paradoxal, mais tout juste suffisant à choquer notre intuition : nous n'avons aucun problème à imaginer l'incidence du micro sur le macroscopique, non seulement depuis Boltzmann, mais plus généralement dans tout processus de construction. On a l'habitude de penser que les parties génèrent le tout.

Que le macro influe sur le microscopique va plus à contre-courant, il me semble, de notre système de pensée : comment penser que le même concept d'énergie décrit un autobus et un électron? La mécanique quantique résout ce problème avec une suprême élégance : elle s'intéresse aux propriétés, aux propriétés actives des objets et non plus à leur essence même. Que l'énergie, d'une fonction qu'elle est en mécanique quantique devienne un opérateur quantique, c'est ÇA la mécanique quantique, c'est ce phénomène dynamique, par là bien susceptible à intervenir dans des domaines très différents à l'intérieur, mais peut-être pas seulement, de l'activité scientifique.

Il me semble enfin que si l'on voit la mécanique quantique comme cette flèche dynamique, on évite toute discussion de paradoxe, ceux-là résultant du regard porté non sur la flèche elle-même mais sur l'un des deux bouts, depuis l'autre.

Je voudrais tout d'abord passer en revue les axiomes de la mécanique quantique dans ce qu'ils ont de plus abstraits , donc de plus susceptible à traverser les disciplines. Cela nous permettra par la même occasion de remarquer l'extraordinaire cohérence de leur ensemble. Puis je présenterai très brièvement quelques aspects quantiques en dehors du quantique. Enfin j'essayerai d'exposer quelques idées sur le quantique en dehors de l'exercice scientifique.

2. Axiomes, merveilleux axiomes

Au début de la mécanique quantique il y a le $+$.

Axiome 1 : un système quantique est décrit par un espace vectoriel de Hilbert.

Pour éviter la technique nous le supposerons de dimension finie : un espace de Hilbert est une espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Dans ce qui nous intéresse l'aspect le plus important est la structure additive : la somme de deux éléments est encore un élément d'un espace vectoriel. Ce principe de superposition n'est pas nouveau, il existe depuis la théorie ondulatoire de la lumière .

Les particules existent, c'est le $\otimes$

Axiome 2 : si un système quantique est formé de deux sous-systèmes alors son espace de Hilbert est le produit tensoriel, noté $\otimes$, des deux espaces de Hilbert de ses parties.

Des propriétés (qui d'ailleurs le définissent) du produit tensoriel nous n'aurons besoin que de la distributivité par rapport à l'addition, qui s'exprime (diagramatiquement) :

$$(a+b)\otimes c \;=\; a\otimes b+b\otimes c.$$

(mais il faut noter tout de suite que + et $\otimes$ ne sont pas symétriques (sinon la théorie quantique s'effondrerait) $a+(b\otimes c)\neq a\otimes c+b\otimes c$).

Le $\otimes$ correspond à l'aspect corpusculaire et il est d'une certaine façon tout à fait classique : en effet pour décrire deux particules, chacune dans $\mathbb{R}^3$, on doit utiliser $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^6$. Et si l'on décrit $\mathbb{R}^3$ par un ensemble de fonctions sur lui-même (nous reviendrons sur ce point plus tard) la description de $\mathbb{R}^6$ est faite à partir du $\otimes$ de celle de $\mathbb{R}^3$ (par exemple $L^2(\mathbb{R}^6)=L^2(\mathbb{R}^3)\otimes L^2(\mathbb{R}^3)$).

Le + et le $\otimes$ existaient donc déjà dans la culture classique, mais pas simultanément.

Voyons tout de suite ce que cet usage simultané a de non-classique. Que l'on puisse additionner les états d'une même particule, au fond, n'est pas choquant. Des vecteurs de la forme

$$(a+b)\otimes(c+d)\,,\quad a,b\in H_1, c,d\in H_2$$

ne choquent pas trop le sens commun, dès lors que l'on sait par exemple que l'on peut superposer des couleurs.

Mais dans $H_1\otimes H_2$ il y a aussi des vecteurs du type (notez la différence entre + et $\otimes$)

$$a\otimes c \;+\; b\otimes d.$$

De tels états, (en général) non factorisables, dépassent le cadre corpusculaire : $(a+b)\otimes(c+d)$ c'est la particule 1 dans l'état $(a+b)$ avec la particule 2 dans l'état $(c+d)$. Mais pour
$a\otimes c \;+\; b\otimes d$ il n'y a plus deux particules chacune dans des états somme, il y a une somme de deux états multicorpusculaires. Repensons tout ceci en termes musicaux.

Dans la musique il y a des instruments et des notes à jouer. Les premiers sont finalement des corpuscules, les autres ont un aspect ondulatoire, puisque qu'on peut les superposer dans un accord. Si l'on représente chaque note jouée par chaque instrument par un symbole de la forme (voir aussi plus bas) :

$$|note, instrument>$$

on s'aperçoit facilement qu'un accord do-mi joué au piano est représenté par

$$|do, piano> + |mi, piano>$$

et que l'on représentera do joué à la fois par un piano et par un violon par

$$|do, piano> \otimes |do, violon> .$$

Des accords plus compliqués seront, par exemple,

$$(|do, piano> + |mi, piano>)\otimes|do, violon>,$$

ou même

$$(|do, piano> + |mi, piano>)\otimes(|do, violon> + |sol, violon>).$$

Mais un accord du type

$$|do, piano> \otimes |mi, violon> \; + |sol, piano> \otimes |do, violon>$$

est littéralement inaudible.

L'acoustique ne peut se le représenter, LA MECANQIUE QUANTIQUE SI.

Pour terminer cette discussion des deux premiers axiomes voyons comment il est impossible d'isoler un sous système lorsqu'il est intriqué au système global, c'est à dire lorsque le système global n'est pas dans un état correspondant à un vecteur produit.

En mécanique quantique on a l'habitude depuis Dirac de noter les éléments d'un espace de Hilbert par le symbole $|a>$, où a maintenant n'apparait plus que comme un indice. Le dual (au sens du produit scalaire) est pris comme un renversement de $|a>$ (dualité) et est noté $<a|$. Cette notation permet beaucoup de "calculs formels". Par exemple le projecteur sur $|a>$ est noté $|a><a|$. Supposons maintenant que $H_1 = H_2 = H$ soit de dimension 2, dont une base est $|0>, |1>$. Un état de type intriqué est par exemple

$$|0>_1 \otimes |1>_2 + |1>_1 \otimes |0>_2$$

où les sous indices réfèrent à l'espace H_1 ou H_2.

Bien sûr un état est donné (modulo une phase) par le projecteur orthogonal associé : $|a><a|$ définit a. Ce que l'on entend par isoler un sous-système consiste à prendre le projecteur associé au vecteur global et à "tracer" sur le complément du sous-système que l'on veut isoler. Donc ici on part de :

$$(|0>_1 \otimes |1>_2 + |1>_1 \otimes |0>_2)\,(<0|_1 \otimes <1|_2 + <1|_1 \otimes <0|_2)$$

soit encore

$$\begin{array}{c} |0>_1<0|_1 \otimes |1>_2<1|_2 \;+\; |0>_1<1|_1 \otimes |1>_2<0|_2 \;+ \\ |1>_1<0|_1 \otimes |0>_2<1|_2 \;+\; |1>_1<1|_1 \otimes |0>_2<0|_2 \end{array}$$

et l'on ne garde que les éléments diagonaux par rapport à l'indice 2. Il nous reste donc

$$|0>_1<0|_1 + |1>_1<1|_1$$

Cet opérateur n'est plus un projecteur : on dit alors que le sous-système n'est plus dans un état pur, qu'il est représenté par un mélange statistique décrit par la "matrice densité" $|0>_1<0|_1 + |1>_1<1|_1$. C'est cette même matrice densité qui apparaîtra plus bas dans la logique-quantique de Girard et Seilinger.

Ce qu'il faut retenir dans cette courte discussion est tout entière, jusque et y compris ses subtilités non classiques dans deux signes, deux actions $+$ et $\otimes$ qui satisfont

$$(a+b)\otimes c \;=\; a\otimes c + b\otimes c.$$

Passons maintenant à la dynamique.

<u>Axiome 3</u> : la dynamique quantique est donnée par un opérateur hermitien d'énergie et l'évolution (linéaire) est unitaire dans H.

Que la dynamique soit donnée par une équation est une idée qui remonte à Newton, mais que l'équation soit linéaire était bien de quoi choquer le monde scientifique en 1926 [9] : penser que, à une époque où les systèmes dynamiques et leurs propriétés chaotiques (donc fortement non-linéaires)étaient en train de changer notre vision du monde, notre système de causalité profond [2] l'équation ultime de la physique, celle dont tout découle, soit bêtement si l'on peut dire, linéaire était incongru. Mais c'était sans prendre en compte l'une des nombreuses pirouettes quantiques : l'équation devient linéaire certes, mais change totalement de statut. C'est maintenant une équation aux dérivées partielles et non plus

[2]voit l'exposé de Bailly et Longo dans ce volume

une équation ordinaire. Et si la théorie des O.D.E. linéaires est simple, celle des E.D.P. linéaires allait nous révéler bien des surprises. Quant à l'unitarité elle n'est que le pendant quantique d'un autre symétrie classique : la conservation de la forme symplectique, chère à tout système hamiltonien. Là aussi les mêmes idées se retrouvent "quantifiées" plutôt que quantiques.

Reste que cette dynamique, parfaitement adaptée à la structure Hilbertienne, ,maltraite considérablement l'espace physique classique. Il suffit pour s'en convaincre de regarder l'évolution libre (sans potentiel) par l'équation de Schrödinger. Cette évolution a la propriétés d'étendre, pour tout temps aussi petit soit il, le support de la condition initiale jusqu'à l'infini. Il n'y a plus de localisation. de tuer le temps.

Après avoir tué l'espace et au nom d'une certaine invariance relativiste, la mécanique quantique se devait de tuer le temps.

<u>Axiome 4</u> : lorsque l'on effectue une mesure sur un système quantique le vecteur d'état est brutalement projeté sur un vecteur propre de la mesure correspondant au résultat de celle-ci. Cette réduction, qui s'éffectue avec perte d'information, est totalement aléatoire.

C'est bien sûr l'axiome le plus savoureux, celui par qui le scandale arrive, surtout'a cause de l'aléatoire. Disons tout de suite que cet axiome es tout à fait nécessaire, et cela en relation avec l'axiome 1 : si le principe de superposition existe, il faut bien qu'il y ait un pendant permettant d'expliquer pourquoi le résultat de la mesure est UN et ne satisfait pas, lui, de principe de superposition. Cet axiome est peut-être minimal, sublimement économique, mais n'oublions pas qu'il est vérifié tous les jours depuis plus de vingt ans, et que l'on peut acheter maintenant des générateurs aléatoires quantiques.

Expliquons pourquoi, il me semble, cet axiome signe en mécanique quantique la mort du temps. Deux de charcatéristiques de la mesure sont l'instantanéité $(t-0)$ et le fait que l'état après la mesure soit sujet à redonner toujours la même valeur $(t=\infty)$. Le temps, cette merveilleuse quantitéé continue dans la culture classique, se trouve donc réduit à deux points : 0 et ∞. Nous verrons plus loin que cette réduction est gage de stabilité.

Soyons un peu plus précis. Une grandeur mesurable, fonction définie sur l'espace en mécanique classique, est maintenant donnée par un opérateur linéaire, une matrice hermitienne. Les valeurs propres sont les résultats (quantifiés) possibles, les vecteurs propres de la matrice correspondant quant à eux aux états après la mesure. La probabilité de trouver la réponse λ_j est donnée par $|(\psi,\psi_j)|^2$, où ψ est l'état avant la mesure, et ψ_j le vecteur propre de valeur propre λ_j. La projection $\psi\to\psi_j$ est à la fois instantanée et en principe aléatoire. Mais toute nouvelle mesure donnera bien sut encore λ_j puisque $|(\psi,\psi_j)|^2$ est maximal.

Il y a perte d'information ($\psi-(\psi,\psi_j)\psi_j$ est perdu) irréversible ($\psi_j$reste ψ_j).

3. Du quantique hors du quantique

3.1. **Groupes quantiques, géométrie non commutative.** Nous avons déjà vu que lors de la quantification les fonctions devenaient opérateurs, matrices. De plus un résultat classique de géométrie nous dit qu'un espace est bien connu si l'on connaˆune algèbre suffisamment large de fonctions sur lui-même. Une structure classique (nous l'avons déjà rencontrée avec le premier axiome) est donc donnée par une algèbre commutative de fonctions. Une structure quantique par une algèbre non commutative de matrices. Si maintenant on fait diparaître l'espace sous-jacent, on peut définir un espace non-commutatif par l'algèbre non commutative de ses "fonctions". C'est l'esprit de la géométrie non-commutative d'Alain Connes [1].

On voit ainsi apparaître un geste qui va du classique au quantique, disons plutôt du commutatif au non commutatif. La mécanique quantique apparaît bien comme ce geste dynamique et non comme l'un des extrémités. Et du coup trouve sa place en géométrie, bien loin de la microphysique [4]. Les groupes quantiques, quant à eux, apparaissent en théorie des systèmes intégrables.......classiques.

3.2. **Logique et quantique.** Il n'est pas question ici de décrire la logique-quantique de J-Y Girard (à ne pas confondre avec la logique quantique) : voir la contribution de Girard dans ce volume et [4], [5] et [10]. Disons simplement que l'extension réside bien sûr dans le non commutatif.

Un booléen classique (vrai-faux) est représenté dans l'espace de Hilbert à deux dimensions par les deux projecteurs $\begin{pmatrix} 1 & o \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que l'on peut probabiliser (et donc prequantifier) en un mélange statistique $\lambda \begin{pmatrix} 1 & o \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & o \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda + \mu = 1,\ \lambda, \mu \geq 0$. un booléen quantique sera quant à lui n'importe quelle matrice hermitienne positive de trace 1 c'est à dire de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix}$, $a,\ d \geq 0,\ a + d = 1$.

Après réduction du paquet d'onde (en physique c'est l'environnement qui s'en charge. Qui s'en charge ici?), la matrice densité devient $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.C'est le résultat d'un mesure NON-LUE, une fois la mesure lue (donc une fois qu'elle a fourni une et une seule valeur) la matrice densité devient $\begin{pmatrix} 1 & o \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette dernière étape est absente de la logique et l'on peut se demander quelle en serait la signification.

3.3. **Calcul et information quantiques.** L'idée d'implémenter des calculs dans un environnement quantique remonte a Feynmann [3] : puisque les calculs nécessaires à la résolution de problèmes quantiques sont si "coûteux" il faut les faire avec des ordinateurs quantiques puisque la nature, elle, les fait sans difficulté.

On imagine ainsi des bits quantiques, un qubit étant un élément d'un espace à deux dimensions. La structure additive permet alors au qubit d'être dans des états de superposition ($|0> + |1>$). Cette simple idée permet, avec beaucoup d'imagination, d'implémenter des algorithmes performants, pour l'instant théoriques, la réalisation expérimentale présentant des problèmes irrésolus [**?**].

Nous donnons en appendice un exemple simple de scénario "spectaculaire lié à la théorie de l'information quantique.

Cette nouvelle discipline a aussi (surtout?) changé notre conception de la mécanique quantique : les idées sont plus simples, plus imagées.

[4] Rappelons aussi que les inégalités de Heisenberg sont aussi une trace de la non commutativité : elle expriment que le produit des imprécisions de la mesure simultanée de deux quantités observables est contrôlé inférieurement par la taille de leur commutateur.

Dans les trois exemples présentés ici la mesure intervient peu (un peu dans le calcul quantique, le résultat final d'un calcul ne pouvant être obtenu que par une mesure sur système). Gageons que cette faiblesse se trouvera bientôt réparée, lorsque ces théories seront "vraiment, non pas quantiques, mais quantifiées.

Dans le paragraphe suivant nous allons voir comment la mesure, son indéterminisme, sa subjectivité, son aspect phénoménologique, semble être présente dans une discipline extra-scientifique.

4. La mesure et la musique

Nous avons déjà vu comment la notation musicale (premier exemple de géométrie analytique [11] et qui date du ...11ème siècle[6])offre une dualité onde-corpuscule sous la forme note-instrument. mai il y, il se semble, plus.

Se demander ce qu'est une œuvre musicale c'est immédiatement se placer au niveau de la performance, de la phénoménologie. L'œuvre n'est que dans son interprétation. C'est une particularité de la musique que d'être à la fois écrite (et sous cette forme non accessible, sauf aux spécialistes, aux interprètes) et recrées à chaque interprétation. De là à penser que chaque exécution est une mesure de l'œuvre....

De plus cet aspect aléatoire, performant, s'est trouvé être utilisé intensément dans la musique du XXième siècle [7].L"interprète se trouve souvent confrontée à des choix (notes, ordre, tous paramètres musicaux) qu'on lui demande expressément d'effectuer sur lors de l'exécution, et non avant. Pourtant nous ne voyons là aucun paradoxe : c'est toujours la même œuvre qui se trouve mesurée à chaque fois.

5. Conclusion

Nous avons tenté dans cette courte note de présenter le monde quantique non comme un lieu opposé au monde classique, mais bien comme un geste, un geste de quantification. Une telle vision dynamique, dynamique qui va du classique au quantique, du commutatif au non-commutatif, des booléens aux espaces cohérents quantiques, se trouve alors prête à traverser les domaines, à acquérir peut-être un peu d'universalité, intra et extra scientifique.

Si les matrices densité aident à penser la logique, elle pourraient bien aider à penser tout court.

Reste cet impondérable de la mesure, qui nous fait croire à l'incroyable, à l'infini jeu des possibles. Mais au fond cet indéterminé intrinsèque, cet aléatoire structurel, n'est pas cela la liberté[8]? Alors laissons le mot de la fin à cet être supérieurement quantique, quantique dans son indétermination à les séduire toutes, qu'est Don Juan [2] (l'air du catalogue n'est il pas une formidable représentation spectrale?) :

Viva la libertà!

APPENDICE

[6]Guido d'Arezzo, 995-1050

[7]il semble le premier exemple d'aléatoire dans la musique classique se trouve dans la deuxième symphonie de Carl Nielsen composée dans les années vingt à....Copenhague [7].

[8]discussion avec Claude Debru

On se propose dans cet appendice de présenter le concept appelé "téléportation" en information quantique [8]. On exposera tout d'abord l'algorithme (d'ailleurs très simple). Dans une deuxième partie nous montrerons comment la partie spatiale de la fonction d'onde permet d'agir sur une partie seulement des qubits et enfin nous discuterons de l'incompatibilité ou non de cette expérience avec le principe relativiste de vitesse maximale de propagation de l'information.

L'algorithme

On commence par deux personnages Alice et Bob qui possèdent chacun un qubit, les deux qubits étant intriqués dans un état EPR $\frac{|00>+|11>}{\sqrt{2}}$. Alice possède un autre qubit $|\psi>$ qu'elle va transmettre à Bob, en agissant seulement sur ses propres qubits (plus un canal classique qui lui permettra de transmettre un élément de $\{1,2,3,4\}$.

Plus précisément l'état que l'on veut transporter est :

$$|\psi>= \alpha|0> +\beta|1>$$

où αet β sont des nombres complexes.

Les trois qubits (deux pour Alice, un pour Bob) sont dans l'état original :

$$|\psi> \otimes|\beta_{00}>$$

où $|\beta_{00}>= \frac{|00>+|11>}{\sqrt{2}}$.

On se place donc dans

$$\underbrace{H\otimes H}_{\text{Alice}} \quad \otimes \quad \underbrace{H}_{\text{Bob}}$$

où $H=\mathbb{C}^2$.

Lorsque Alice et Bob se séparent le système de 3 particules est donc dans l'état

$$\begin{aligned}
|\Phi> &= |\psi> \otimes|\beta_{00}> \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0>(|00>+|11>)+\beta|1>(|00>+|11>)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\left(|000>+|011>\right)+\beta\left(|100>+|111>\right)\right)
\end{aligned}$$

où l'on a fait la convention (immédiate) :

$$| \underbrace{..}_{\text{Alice}} \underbrace{.}_{\text{Bob}} > .$$

Sur "son" $H \otimes H$ Alice fait agir la matrice suivante (porte C-NOT) :

$$U_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base $\{|00>, |01>, |10>, |11>\}$.

Cela veut dire que l'on fait agir $U_{CNOT} \otimes \mathrm{Id}$ sur $|\Phi>$.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} |\Phi_1> &=: (U_{CNOT}\otimes \mathrm{Id})\,|\Phi> \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\left(|000>+|011>\right)+\beta\left(|110>+|101>\right)\right). \end{aligned}$$

Ensuite elle fait agir sur son premier qubit une porte de Hadamard, c'est à dire la matrice :

$$H_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Cela veut dire encore une fois que l'on fait agir sur $|\Phi_1>$ la matrice $H_a\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}$.

On obtient :

$$\begin{aligned} |\Phi_2> &=: (H_a\otimes \mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})\,|\Phi_1> \\ &= \frac{1}{2}(\alpha\left((|0>+|1>)|00>+(|0>+|1>)|11>\right) \\ &\quad +\beta\left((|0>-|1>)|10>+(|0>-|1>)|01>\right)) \\ &= \frac{1}{2}(|00>(\alpha|0>+\beta|1>)+ \\ &\quad\ |01>(\alpha|1>+\beta|0>)+ \\ &\quad\ |10>(\alpha|0>-\beta|1>)+ \\ &\quad\ |11>(\alpha|1>-\beta|0>)). \end{aligned}$$

Tous les α, β sont "passés" du côté de Bob.

Maintenant Alice va effectuer une mesure dont les vecteurs propres sont $|00>$, $|01>$, $|10>$, $|11>$ correspondant aux valeurs propres disons 1, 2, 3, 4.

La réduction du paquet d'ondes (total) fera que si le résultat est :

- 1, alors Bob a $|\psi>$
- 2, alors Bob a $|\psi_2>=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}|\psi>$, et $|\psi>=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}|\psi_2>$
- 3, alors Bob a $|\psi_3>=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}|\psi>$, et $|\psi>=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}|\psi_3>$
- 4, alors Bob a $|\psi_4>=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}|\psi>$, et $|\psi>=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}|\psi_4>$.

Il suffit donc à Alice de communiquer à Bob 1, 2, 3 où 4 et Bob sait ce qu'il doit faire pour récupérer $|\psi>$.

Réalisation physique

Il manque dans la discussion précédente à comprendre les deux faits suivants :

1. comment Alice et Bob s'éloignent ils l'un de de l'autre en "emportant" leur qubit? Comment rendre compte du fait que Alice agit sur ses propres qubits sans agir sur ceux de Bob?

2. par quelle opération physique Alice agit elle sur ses qubits?

Commençons par la deuxième question et voyons les circonstances expérimentales en jeu.

Les deux portes utilisées sont deux opérateurs unitaires, donc deux opérateurs d'évolution[10]. Il s'agit donc concrètement de créer une interaction avec le qubit pendant un temps (court et précis) de façon à ce que l'évolution quantique réalise les matrices H_a et U_{CNOT}.

Les qubit peuvent être réalisés sous deux formes : soit des photons, polarisés droite ou gauche (donc deux états $|L>$ et $|R>$), soit des particules a spin $\frac{1}{2}$, par exemple des électrons (dans ce cas l'espace de Hilbert est réalisé par les états $|+>$ et $|->$ identifiés à $|0>$ et $|1>$.

Que sait on faire expérimentalement[11]?

Pour les photons on sait réaliser expérimentalement H_a et une porte CNOT qui "marche une fois sur 4" (il y a un autre degré de liberté qui fait que suivant sa valeur U_{CNOT} marche ou pas). Pour les particules à spin on ne sait faire aucune des deux portes. Les expériences (récentes) de téléportation utilisent donc des photons.

La première question en contient en fait plusieurs : tout d'abord il faut comprendre comment on peut créer deux qubits intriqués puis les séparer[12].

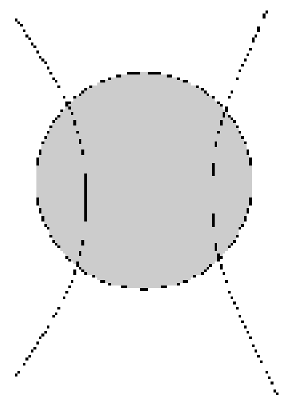
Dans le cas photonique les photons sont créés automatiquement dans un état intriqué et avec des impulsions différentes pour chacun d'eux, c'est à dire qu'ils partent dans des directions différentes et on peut donc les isoler (par exemple en les faisant passer dans des fentes).

Pour les électrons on peut imaginer la situation suivante :

[10] rappelons que l'évolution en mécanique quantique est régie par l'équation de Schrödinger $-i\partial_t\psi = H\psi$, où H est un opérateur auto-adjoint et donc que l'opérateur d'évolution est $U = e^{itH}$

[11] merci à Jean-Michel Raimond pour ces informations

[12] encore merci à Jean-Michel Raimond



on envoie deux électrons l'un vers l'autre, la répulsion électronique les fait se séparer à nouveau, mais au moment où ils sont le plus proche on crée une interaction avec un champs électromagnétique (dans la zone sombre) qui touche les états de spin et crée un état intriqué (ou bien il suffit de remarquer qu'un état intriquée peut être vecteur propre d'une mesure et donc que l'état du système après la mesure peut être celui que l'on veut).

Dans l'argument qui précède on a mélangé les concepts classiques et quantiques, c'est aussi ce que l'on faisait lorsque l'on disait "Alice s'éloigne de Bob". Voyons comment on peut formaliser en Mécanique Quantique un tel énoncé.

Quand on parle d'éloignement on parle de distance et donc d'espace : l'état du système doit donc avoir un composante spatiale. La fonction d'onde d'un qubit (supposons qu'Alice n'ait qu'un qubit) n'est plus un élément de $\mathbb{C}^2$ mais un élément de $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$. Un état est maintenant de la forme

$$\varphi(x) \otimes (\alpha|0> +\beta|1>)$$

Eloigner un qubit signifie tout simplement agir sur φ, par exemple en la translatant de $X \in \mathbb{R}^3$. Si φ est localisée près de 0 (par exemple $\varphi(x) = \pi^{-3/2}e^{-\frac{x^2}{2}}$) on définit alors φ_X par

$$\varphi_X(x) = \varphi(x - X)$$

bien évidemment localisée près de X. On comprend alors bien que dire "Alice est loin de Bob" veut dire que les supports de φ_{Alice} est séparé de celui de φ_{Bob}. Par exemple $\varphi_{\text{Alice}} = \varphi_X$ et $\varphi_{\text{Bob}} = \varphi_{-X}$.

Dire que l'action d' Alice est locale autour de X veut dire que l'opérateur d'évolution correspondant peut s'écrire .$U = e^{itH}$ avec

$$h = \chi \otimes \sigma$$

où σ est une matrice 2×2 hermitienne et χ est un opérateur de multiplication (dans $L^2(\mathbb{R}^3)$) par une fonction C^∞ à support compact égale à un sur X.

Le lemme suivant est crucial.

Lemma 5.1. *Si $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ a un support en x d'intersection nulle avec celui de χ, alors*

$$U\psi = \psi$$

La preuve est très simple il suffit de remarquer que

$$U = \mathrm{Id} + \sum_0^\infty \frac{1}{k!} (\chi \otimes \sigma)^k$$

donc

$$U\psi = \psi + \sum_0^\infty \frac{1}{k!} \underbrace{(\chi \otimes \sigma)^k \psi}_{0}.$$

Il faut remarquer dans ce lemme que la non-interaction des support spatiaux implique la non-interaction aussi des parties "qubits".

Il suffit enfin de remarquer que l'action du hamiltonien sur le système total des deux qubits est donné par $H \otimes Id + Id \otimes H$ qui agit sur $(L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ pour s'apercevoir que sous la même condition sur les supports que précédemment :

$$\begin{aligned} e^{it(H \otimes Id + Id \otimes H)} \varphi_{\mathrm{A}} |\sigma_{\mathrm{A}} > \otimes \varphi_{\mathrm{B}} |\sigma_{\mathrm{B}} > &= \left(e^{itH} \varphi_{\mathrm{A}} |\sigma_{\mathrm{A}} > \right) \otimes \left(e^{itH} \varphi_{\mathrm{B}} |\sigma_{\mathrm{B}} > \right) \\ &= e^{itH \otimes Id} \left(\varphi_{\mathrm{A}} |\sigma_{\mathrm{A}} > \otimes \varphi_{\mathrm{B}} |\sigma_{\mathrm{B}} > \right) \end{aligned}$$

et donc par complétion

$$e^{it(H \otimes Id + Id \otimes H)} |\Phi >= e^{itH \otimes Id} |\Phi >$$

pour tout $|\Phi >$ Bob-localisé comme auparavant.

Discussion

Les considérations un peu techniques précédentes ne doivent pas masquer la magie de cette expérience : bien que les supports spatiaux des qubits soient séparés Alice agit sur le qubit de Bob. C'est là une des principales objections que l'on a faites à la Mécanique Quantique depuis sa naissance : il semble que l'on puisse ainsi transmettre une information instantanément, et cela en contradiction avec les théorie de la Relativité.

Bien sûr dans l'expérience de téléportation Alice doit communiquer aussi avec Bob par un canal classique, donc à une vitesse plus petite que celle de la lumière. Donc il n'y a donc pas de contradiction. Mais le miracle est ailleurs, plus précisément dans ce qui se passe au moment où Alice effectue sa mesure. Si le résultat est 1 alors le système passe brutalement de l'état

$$|\Phi_2>=\frac{1}{2}(|00>(\alpha|0>+\beta|1>)+|01>(\alpha|1>+\beta|0>)$$
$$+|10>(\alpha|0>-\beta|1>)+|11>(\alpha|1>-\beta|0>))$$

à l'état .

$$|\Phi_2>=(|00>(\alpha|0>+\beta|1>)$$

c'est à dire un état qui du point de vue de Bob est très différent. Il n'y a certes pas de transmission de l'information[15] mais tout de même quelque chose qui ne peut nous empêcher de rêver.

References

[1] A. Connes, Noncommutative geometry, Academic Press, 1994.
[2] L. Da Ponte, W.A. Mozart, Don GIovanni, final du premier acte, première représentation Prague 29/10/1787.
[3] R. Feynman, Simulating physics with computers, Int. J. Theor. Phys. **B2**(1982), 467-488.
[4] J-Y Girard, Between logic and quantic : a tract, Octobre 2003.
[5] J-Y Girard, Geometry of interaction IV : the Feedback Equation, Mars 2004.
[6] S. Haroche, Cours au Collège de France, http : //www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/college/college.html
[7] C. Nielsen, Deuxième symphonie, 1924.
[8] M. Nielsen et I. Chuang, Quantum computation and quantum information, Cambridge University Press, 2000.
[9] E. Schrödinger, Mémoires sur la Mécanique Quantique, Editions J. Gabay, Paris, 1994.
[10] P. Seilinger, Towards a quantum computing langage, Mathematical Structures in Computer Sciences, **13**, 2003
[11] I. Xenakis, Kéleütha, L'Arche, Paris, 1994.

[15]on dit parfois que, si après la mesure d'Alice, Bob effectue une mesure dont un des vecteurs propres est $\alpha|0>+\beta|1>$ alors il est sûr de trouver ce résultat là, mais cela ne correspond pas à une transmission d'information